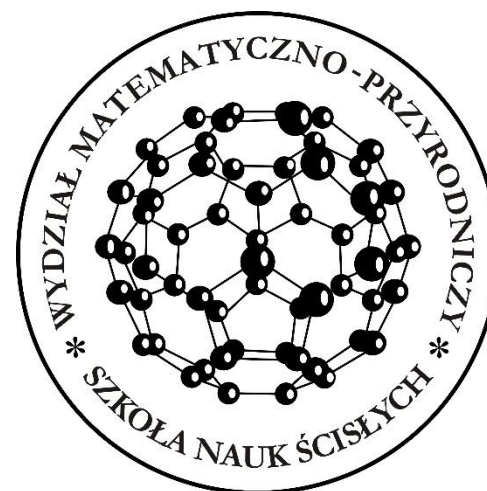


Zastosowania metod analitycznej złożoności obliczeniowej do przetwarzania sygnałów cyfrowych oraz w metodach numerycznych teorii aproksymacji

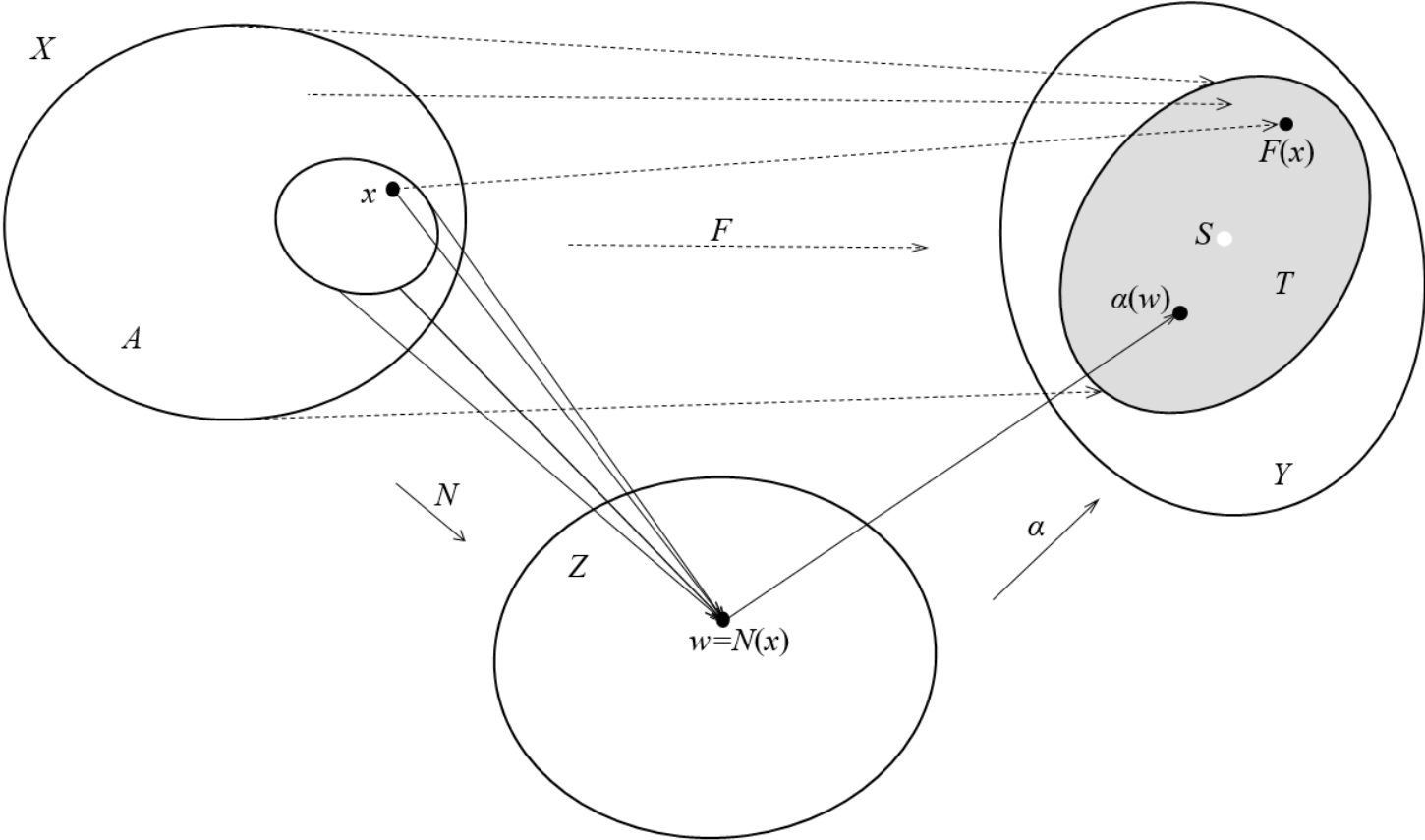
Marek A. Kowalski

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy. Szkoła Nauk Ścisłych



Paradygmat



Rys. 1: Byłoby najlepiej, gdyby „trafienie” $\alpha(w)$ wypadło w środku S , zaznaczonej szarym kolorem, „tarczy” T .

Główny przedmiot wykładu:

$$W(a) = \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{funkcja całkowita} \end{array} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \exists K > 0 \forall z \in \mathbb{C} |f(z)| \leq Ke^{a|z|} \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in W(a).$$

$W(a)$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest przestrzenią Hilberta funkcji całkowitych $y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, które dają się zapisać w postaci $y(z) = \int_{-a}^a Y(\omega) e^{itz} d\omega$, gdzie $i = \sqrt{-1}$ oraz $Y \in L_2(-a, a)$.

$$\mathbb{C}^2 \ni (y, z) \rightarrow K(y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(a(y-z))}{\pi(y-z)} & \text{jeśli } y \neq z, \\ \frac{a}{\pi} & \text{jeśli } y = z \end{cases}$$

$$\forall f \in W(a), z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \langle f, K(\cdot, z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin(a(y-z))}{\pi(y-z)} dy.$$

Fizyczne interpretacje liczb a i τ są następujące: przedział $[-a, a]$ jest pasmem rozpatrywanych sygnałów, zaś przedział $[-\tau, \tau]$ – zwany przedziałem obserwacji – wskazuje, że norma w przestrzeni $L_2(-\tau, \tau)$ jest miernikiem oddalenia tych sygnałów od ich przybliżeń.

Dla danej liczby dodatniej h ciąg funkcyjny $\{S(k, h)/\sqrt{h}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ jest ortonormalny w $L_2(-\infty, \infty)$ i liniowo gęsty w $W(\pi/h)$.

$$\mathbb{C} \ni z \rightarrow S(k, h)(z) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(z-kh)\right)}{\frac{\pi}{h}(z-kh)} & \text{jeśli } z \neq kh, \\ 1 & \text{jeśli } z = kh. \end{cases}$$

Jeśli $f \in W(a)$, $h \in (0, \pi/a]$, $t \in \mathbb{R}$ oraz $z \in \mathbb{C}$, to

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)S(k, h)(z). \quad (*)$$

W literaturze teza () występuje często pod nazwą twierdzenia Kotielnikowa-Shannona, twierdzenia Whittakera-Nyquista-Kotielnikowa-Shannona lub twierdzenia o próbkowaniu. Dla pasma $[-a, a]$ wyrażonego w Herzach [Hz] poprzez wartość $a=2\pi B$, liczbę B [Hz] nazywamy częstotliwością Nyquista. Zgodnie z tezą (*) każdy sygnał o paśmie wyrażonym przez $a=2\pi B$ może być bezstratnie odtworzony z jego próbek na prostej rzeczywistej branych z częstotliwością co najmniej dwukrotnie wyższą od jego częstotliwości Nyquista B .*

Dla danych liczb dodatnich a oraz τ przyjmujemy

$$c = a\tau$$

i określamy *czołową funkcję kulistą* $\phi_k : [-\tau, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-\tau}^{\tau} K(t, s)\phi_k(s)ds = \lambda_k\phi_k(t), \quad \lambda_k \searrow 0 \text{ dla } k \rightarrow \infty.$$

*Każda funkcja ϕ_k zależy w sposób ciągły od a oraz τ . Ponadto, dla ustalonej wartości $c = a\tau$ ma rozszerzenie do funkcji całkowitej $\mathbb{C} \ni z \rightarrow \phi_k(z)$.
Funkcje ϕ_k są parzyste dla k parzystych i nieparzyste dla k nieparzystych.*

Funkcje ϕ_k dla $k = 0, 1, \dots$ są ortonormalne i liniowo gęste w $L_2(-\tau, \tau)$.

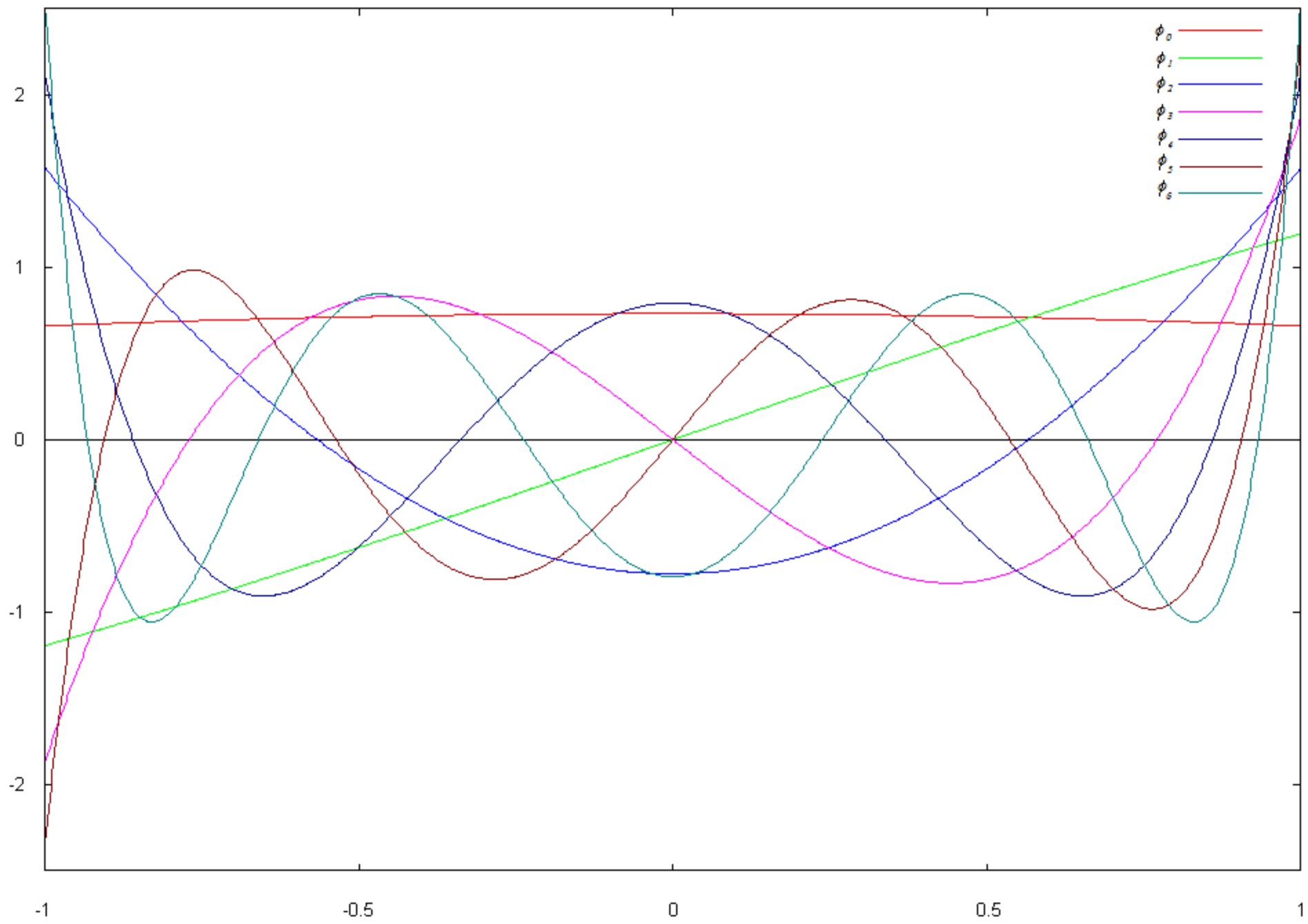
Funkcje ϕ_k dla $k = 0, 1, \dots$ są ortogonalne w $L_2(-\infty, \infty)$ i liniowo gęste w $W(a)$.

Ponadto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_k(x)|^2 dx = \frac{1}{\lambda_k}.$$

Funkcje ϕ_k ma dokładnie k miejsc zerowych $\xi_{k,1} < \xi_{k,2} < \dots < \xi_{k,k}$ w przedziale $(-\tau, \tau)$. Co więcej, miejsca zerowe $\xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \dots, \xi_{k,k}$ i $\xi_{k+1,1}, \xi_{k+1,2}, \dots, \xi_{k+1,k+1}$ przeplatają się, czyli

$$-\tau < \xi_{k+1,1} < \xi_{k,1} < \xi_{k+1,2} < \xi_{k,2} < \dots < \xi_{k+1,k} < \xi_{k,k} < \xi_{k+1,k+1} < \tau.$$



Niech τ i E będą liczbami dodatnimi. Oznaczmy przez $W(a, \tau)$ podprzestrzeń $L_2(-\tau, \tau)$ złożoną z zawężeń funkcji z $W(a)$ do prostej rzeczywistej. Zdefiniujmy też

$$\|f\|_{2,\infty}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad J(a, \tau, E) = \{f \in W(a, \tau) : \|f\|_{2,\infty}^2 \leq E\},$$

odnotowując, że dla $f \in W(a, \tau)$ wielkość $\|f\|_{2,\infty}^2$ ma fizyczną interpretację energii sygnału f . Funkcje z $J(a, \tau, E)$ są sygnałami o paśmie $[-a, a]$ i energii ograniczonej przez E . Będziemy zakładać, że sygnały te są znane jedynie poprzez wartości operatora informacji

$$N: W(a, \tau) \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

$$N(f) = [L_1(f), \dots, L_n(f)],$$

gdzie L_i są funkcjonalami liniowymi z klasy \mathcal{L} . Może to być np. klasa wszystkich funkcjonałów liniowych albo klasa funkcjonałów liniowych ciągłych.

W badaniach istotną rolę odgrywają średnice aproksymacyjne (liniowe średnice Kołmogorowa – A , średnice Gelfanda – C , średnice Kołmogorowa – d).

$$A_n(B, \mathcal{F}) = \inf_{\substack{P_n \\ \text{rank } P_n \leq n-1}} \sup_{a \in B} \|a - P_n(a)\|,$$

$$C_n(B, \mathcal{F}) = \inf_{\substack{V \subset \mathcal{F} \\ \text{codim}(V) < n}} \sup\{\|a\| : a \in B \cap V\},$$

$$d_n(A, \mathcal{F}) = \inf\left\{ \sup_{a \in A} \inf_{v \in V} \|a - v\| : V \subset \mathcal{F}, \dim V < n \right\}.$$

Dla wszystkich $n \geq 1$ średnice aproksymacyjne $A_n(J(a, \tau, E), W(a, \tau))$, $C_n(J(a, \tau, E), W(a, \tau))$ i $d_n(J(a, \tau, E), W(a, \tau))$ przyjmują wspólną wartość $\sqrt{E\lambda_{n-1}(a\tau)}$. Ponadto (dla $n > 1$)

$$\text{span}\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}\}$$

jest podprzestrzenią eksteremalną dla średnicy Kolmogorowa $d_n(J(a, \tau, E), W(a, \tau))$, zaś jądra $\ker \mathcal{N}_{n-1}$ i $\ker N_{n-1}$ są podprzestrzeniami ekstremalnymi dla średnicy Gelfanda $C_n(J(a, \tau, E), W(a, \tau))$.

$$\mathcal{N}_n f = [(f, \phi_0), (f, \phi_1), \dots, (f, \phi_{n-1})]^T,$$

$$N_n f = [f(\xi_{n,1}), f(\xi_{n,2}), \dots, f(\xi_{n,n})]^T.$$

Dla $p = [2c/\pi] - 1$ i $q = [2c/\pi] + 1$ wartości własne $\lambda_p(c)$ i $\lambda_q(c)$ spełniają nierówności

$$\lambda_p(c) \geq 1/2, \quad \lambda_q(c) \leq 1/2.$$

Co więcej, jeśli $k > 2c/\pi$, to

$$\frac{\pi}{2I_k(k + 1/2)} \left(\frac{c}{2\pi k} \right)^{2k} < \lambda_k(c) < \frac{2c}{\pi^2 k^2} \left(\frac{ec}{2k} \right)^{2k}, \quad I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{2k} dx.$$

Nie istnieje informacja $\mathbf{N} : W(a, \tau) \rightarrow \mathbb{C}^n$ ani algorytm
$$\rho : \mathbf{N}(J(a, \tau, E)) \rightarrow L_2(-\tau, \tau)$$

taki, że jego błąd

$$e(\rho) = \sup_{f \in J(a, \tau, E)} \|f - \rho(\mathbf{N}f)\|_{2, \tau}$$

spełnia nierówność $e(\rho) < \sqrt{E\lambda_{n-1}(a\tau)}$.

Niech (\cdot, \cdot) oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni $L_2(-\tau, \tau)$.

Niech algorytmy $\alpha : \mathcal{N}_n(J(a, \tau, E)) \rightarrow L_2(-\tau, \tau)$ i $\beta : N_n(J(a, \tau, E)) \rightarrow L_2(-\tau, \tau)$ będą zdefiniowane wzorami

$$\alpha(\mathcal{N}_n(f)) = \sum_{k=0}^{n-1} (f, \phi_k) \phi_k, \quad \beta(N_n(f)) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\sin a(\cdot - \xi_{n,k})}{(\cdot - \xi_{n,k})},$$

gdzie współczynniki x_1, x_2, \dots, x_n są rozwiązaniem liniowego układu równań

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{\sin a(\xi_{n,j} - \xi_{n,k})}{\xi_{n,j} - \xi_{n,k}} = f(\xi_{n,j}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Wówczas

$$e(\alpha) = e(\beta) = \sqrt{E \lambda_{n-1}(a\tau)}.$$

Ciekawostka:

$$\forall a, \tau > 0 \quad \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{n(\varepsilon) \log \log 1/\varepsilon}{\log 1/\varepsilon} = 1.$$

$$n(\varepsilon) \approx \frac{\log 1/\varepsilon}{\log \log 1/\varepsilon}$$

Cel: dla sygnałów f z $J(a, \tau, 1)$ chcemy odtworzyć wartość $f(t_0)$ na podstawie $\vec{y} \in \mathbb{N}(f)$,

$$\mathbb{N}(f) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \vec{y} = [f(t_1 + \Gamma_1), \dots, f(t_n + \Gamma_n)]^T + \vec{\Delta}, \|\vec{\Gamma}\|_{p_1} \leq \gamma, \|\vec{\Delta}\|_{p_2} \leq \delta\}.$$

$$\|\vec{x}\|_p = \begin{cases} \sup_{j=1, \dots, n} |x_j| & \text{dla } p = \infty, \\ \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} & \text{dla } p < \infty, \end{cases} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1, \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1, \\ p_1, p_2 \in [1, \infty].$$

Błąd algorytmu φ : $e(\varphi, \gamma, \delta) = \sup_{\vec{y} \in \mathbb{N}(f), f \in J(a, \tau, 1)} \|f - \varphi(\vec{y})\|.$

Promień informacji: $r(\gamma, \delta) = \inf_{\varphi} e(\varphi, \gamma, \delta).$

Algorytm optymalny dla $\gamma = \delta = 0$:

$$\phi_o(\vec{y}) = \vec{y}^T \mathcal{M}^{-1} \vec{g},$$

$$\mathcal{M} = (\text{sinc}(a(t_j - t_k)))_{j,k=1}^n,$$

$$\vec{g} = [\text{sinc}(a(t_1 - t_0)), \dots, \text{sinc}(a(t_n - t_0))]^T,$$

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Dla nieujemnych i dostatecznie małych wielkości γ, δ i dla dowolnej liczby $t \in [0, 1]$, $r(\gamma, \delta)$ spełnia nierówności

$$A + O(\gamma^2 + \delta^2) \leq r(\gamma, \delta) \leq B + O(\gamma^2),$$

gdzie wielkości A i B są określone wzorami

$$A = \left(1 - \frac{t}{2}\right)r(0, 0) + t \frac{\sqrt{6}}{6} a^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{p_1}} \gamma + \frac{1}{2} \|\mathcal{M}^{-1} \vec{g}\|_{q_2} \delta,$$

$$B = r(0, 0) + \frac{\sqrt{3}}{3} a^{\frac{3}{2}} \|\mathcal{M}^{-1} \vec{g}\|_{q_1} \gamma + \|\mathcal{M}^{-1} \vec{g}\|_{q_2} \delta.$$

$$r(0, \delta) = r(0, 0) + \|\mathcal{M}^{-1} \vec{g}\|_{q_2} \delta + O(\delta^2).$$

Alternatywą dla ϕ_o jest algorytm interpolacji Lagrange'a,

$$\lambda_n(\vec{y}) = \sum_{k=1}^n y_k l_k(t_0), \quad l_k(t_0) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{t_0 - t_j}{t_k - t_j}.$$

Jeżeli $t_j = \tau \cos\left(\frac{2(n-j)+1}{2n}\pi\right)$, $j = 1, \dots, n$, to

$$e(\lambda_n, \gamma, \delta) \leq \sqrt{\frac{a}{n + \frac{1}{2}}} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^n}{n!} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a^{\frac{3}{2}} \gamma + \delta\right) \left(\frac{2}{\pi} \ln(n+1) + 1\right).$$

Informacja całkowa:

$$\mathbb{N}(f) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{C}^n : y_k = \int_{-\tau+\Upsilon_k}^{\tau+\Gamma_k} f(t)w_k(t)dt + \Delta_k, \|\vec{\Gamma}\|_{p_1} \leq \gamma, \|\vec{\Upsilon}\|_{p_1} \leq \gamma, \|\vec{\Delta}\|_{p_2} \leq \delta \right\}.$$

$$w_k = W_{k-1}\phi_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

Jeśli $\gamma = \delta = 0$, to algorytm optymalny jest dany równaniem

$$\alpha(\vec{y}) = \sum_{k=1}^n y_k \frac{\phi_{k-1}(t_0)}{W_{k-1}}.$$

Jeśli $c = a\tau \geq 2$, to dla nieujemnych, dostatecznie małych wartości γ, δ mamy

$$\frac{1}{2} \left(r(0, 0) + A_1 a^{\frac{3}{2}} \gamma + B\delta \right) + O(\gamma^3 + \delta^2) \leq r(\gamma, \delta) \leq r(0, 0) + A_2 a^{\frac{3}{2}} \gamma + B\delta.$$

Jeśli $W_0 = \dots = W_{n-1} = \sqrt{a}$, to $B \neq B(a)$.

Inny przykład:

$$S : A \rightarrow \mathbb{R}, S(f) = \int_a^b f(t)dt,$$

$$A = \{f \in C[a, b] : |f(u) - f(v)| \leq L|u - v|\}.$$

Całkujemy na podstawie zaburzonej informacji o wartościach funkcji podcałkowych w różnych punktach t_1, t_2, \dots, t_n z przedziału $[a, b]$.

$$\mathbb{N}(f) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \vec{y} = [f(t_1 + \Gamma_1), \dots, f(t_n + \Gamma_n)]^T + \vec{\Delta}, \|\vec{\Gamma}\|_{p_1} \leq \gamma, \|\vec{\Delta}\|_{p_2} \leq \delta\}.$$

$$r(0, 0) = \frac{L}{2} (\|\vec{w}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2),$$

$$r(\gamma, \delta) = r(0, 0) + L\|\vec{w} - \vec{v}\|_{q_1}\gamma + \|\vec{w} + \vec{v}\|_{q_2}\delta + A\gamma^2 - B\delta^2,$$

$$\vec{w} = \left[t_1 - a, \frac{t_2 - t_1}{2}, \frac{t_3 - t_2}{2}, \dots, \frac{t_n - t_{n-1}}{2} \right]^T,$$

$$\vec{v} = \left[\frac{t_2 - t_1}{2}, \frac{t_3 - t_2}{2}, \dots, \frac{t_n - t_{n-1}}{2}, b - t_n \right]^T.$$

Najlepiej więc wybrać $t_j = a + (2j - 1)\frac{b-a}{2n}$, bo wówczas $\vec{w} = \vec{v}$.

Czołowe funkcje kuliste można też wykorzystać do wielokanałowej transmisji cyfrowej charakteryzującej się nadzwyczajną odpornością na zakłócenia.

Ilustracją niech będzie krótki pokaz.

Band-limited HD transmission through low quality media

(Bob Johnson, Marek Kowalski, Kris Sikorski)

SHOW THE NOISE

SHOW THE STREAMS

MODULATION

DEMODULATION

10
1
34
11
12
8
2
4

$$\int_{-\tau}^{\tau} K(t, s) \phi_k(s) ds = \lambda_k \phi_k(t)$$

Bandwidth 4 kHz, "1" = 1/16000 s

10
1
34
11
12
8
2
4

Wanishing wave ends 1 = yes, 0 = no	<i>c</i>	3	additive noise (x) = $c \sum a[i] \sin(2\pi g[i] x) + b[i] \cos(2\pi h[i] x)$, $\sum a[i] + b[i] = 100,00\%$										VR
	<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5	
1	<i>a</i> [<i>i</i>]	2,50%	3,00%	7,50%	10,00%	2,00%	7,50%	10,00%	7,00%	3,50%	2,50%	PRNL	
# bits per channel max=8	<i>g</i> [<i>i</i>]	2000,00	5000,00	22,00	15,00	345,00	1234,00	20,00	8000,00	5000,00	120,00	10,00%	
	<i>b</i> [<i>i</i>]	2,50%	3,00%	7,50%	10,00%	2,00%	3,00%	5,00%	6,00%	3,50%	2,00%	Jitter (ns)	
4	<i>h</i> [<i>i</i>]	2000,00	5000,00	22,00	30,00	345,00	1234,00	25,00	8000,00	5000,00	120,00	10	

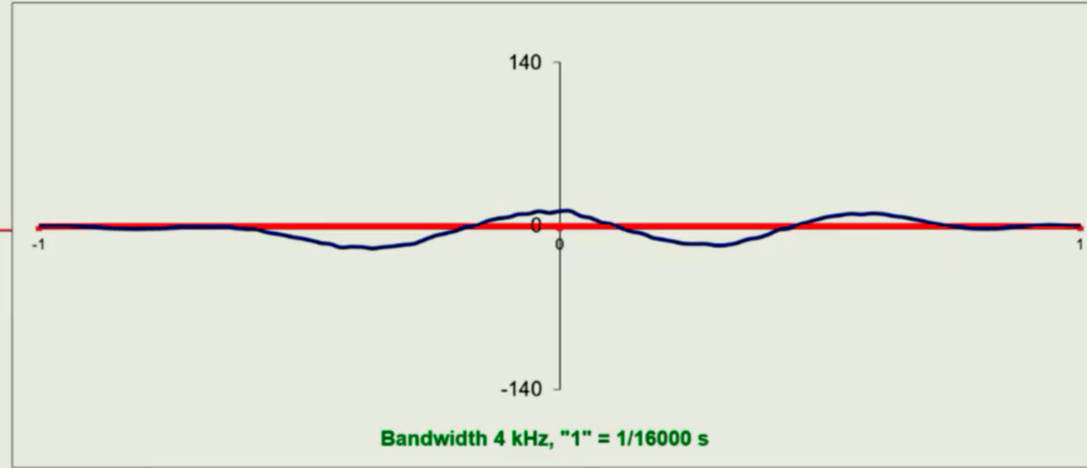
SHOW THE NOISE

SHOW THE STREAMS

MODULATION

DEMODULATION

28
18
18
10
23
10
21
14



28
18
18
10
23
10
21
14

Wavishing wave ends 1 = yes, 0 = no	c	5	additive noise (x) = $c \sum a[i] \sin(2\pi g[i]x) + b[i] \cos(2\pi h[i]x)$, $\sum a[i] + b[i] = 99,50\%$										VR
	i		2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	
1	$a[i]$	2,00%	3,00%	7,50%	10,00%	2,00%	7,50%	10,00%	7,00%	3,50%	2,50%	PRNL	
# bits per channel max=8	$g[i]$	2,00	3,00	22,00	15,00	34,00	12,00	20,00	8,00	5,00	1,00	0,00%	
	$b[i]$	2,50%	3,00%	7,50%	10,00%	2,00%	3,00%	5,00%	6,00%	3,50%	2,00%	Jitter (ns)	
5	$h[i]$	2,00	5,00	2,00	4,00	3,00	1,00	2,00	8,00	5,00	1,00	100	

Wybrane pozycje książkowe dotyczące analitycznej złożoności obliczeniowej:

- Traub, J. F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall, 1964. Reissued Chelsea Publishing Company, 1982; Russian translation MIR, 1985; Reissued American Mathematical Society, 1998
- Traub, J. F., and Woźniakowski, H., *A General Theory of Optimal Algorithms*, Academic Press, New York, 1980
- Traub, J. F., Woźniakowski, H., and Wasilkowski, G. W., *Information, Uncertainty, Complexity*, Addison-Wesley, New York, 1983
- Novak, E., *Deterministic and Stochastic Error Bounds in Numerical Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1349, Springer-Verlag, New York, 1988
- Traub, J. F., Woźniakowski, H., and Wasilkowski, G. W., *Information-Based Complexity*. Academic Press, New York, 1988
- Werschulz, A. G., *The Computational Complexity of Differential and Integral Equations: An Information-Based Approach*, Oxford University Press, New York, 1991
- Kowalski, M., Sikorski, K., and Stenger, F., *Selected Topics in Approximation and Computation*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1995
- Plaskota, L., *Noisy Information and Computational Complexity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996
- Traub, J. F., and Werschulz, A. G., *Complexity and Information*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1998
- Ritter, K., *Average-Case Analysis of Numerical Problems*, Springer-Verlag, New York, 2000
- Sikorski, K., *Optimal Solution of Nonlinear Equations*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2001.

Wybrane artykuły dotyczące tematyki wykładu:

- Kowalski M., Wershulz A., Woźniakowski H., *Is Gauss quadrature optimal for analytic functions ?*, Num. Math. 47 (1985) 89 - 98
- Kowalski M., *Optimal complexity recovery of band- and energy-limited signals*, J. Complexity 2 (1986) 239 - 254
- Kowalski M., Sielski W., *Approximation of smooth periodic functions in several variables*, J. Complexity 4 (1988) 356 - 372
- Kowalski M., Stenger F., *Optimal complexity recovery of band- and energy-limited signals. II*, J. Complexity 5 (1989) 45 - 59
- Ikebe Y., Kowalski M., Stenger F., *Rational approximation of the step, filter and impulse functions*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 124 (1990) 441 - 454
- Kacewicz B. Z., Kowalski M., *Recovering signals from inaccurate data*, Proc SPIE 1610 (1992) 68 - 74
- Kacewicz B. Z., Kowalski M., *Approximating linear functionals on unitary spaces in the presence of bounded data errors with application to signal recovery*, Int. J. Adaptive Control and Signal Processing 9 (1995) 19 - 31
- Kacewicz B. Z., Kowalski M., *Recovering linear operators from inaccurate data*, J. Complexity 11 (1995) 227 - 239
- Dąbrowska D., Kowalski M., *Approximating band- and energy-limited signals in the presence of jitter*, J. Complexity 14 (1998) 557 - 570

- Kowalski M., *Sensitivity of best recovery in the Sobolev spaces $W_{\infty}^{r,d}$, $\widetilde{W}_{\infty}^{r,d}$ for perturbed sampling*, Numerical Algorithms 23 (2000) 251 - 261
- Kowalski M., *Odtwarzanie wielowymiarowych sygnałów analogowych o ograniczonym paśmie i ograniczonej energii*, ISBN 83-7072-198-2, Wydawnictwo UKSW (2001) 416 - 423
- Kowalski M., *Obliczanie i reprezentacja czołowych funkcji kulistych*, Rocznik Naukowy Wydziału Zarządzania w Ciechanowie, zeszyt 1-2, tom II (2008) 97 - 106.

Dziękuję za uwagę !

kowalski@uksw.edu.pl